4

DISSERTATIO ACADEMICA,

DE MOTU CORPORUM LIBERO IN MEDIO RESISTENTE;

CUJUS PARTEM QUARTAM,

VENIA AMPLISS. FACULTATIS PHILOSOPH.

IN IMPERIALI ACADEMIA ABOËNSI,

PUBLICO EXAMINI MODESTE SUBJICIUNT

Mag. NATHAN. GERH. AF SCHULTÉN,

Docens in Mathesi Applicata,

&

CAROLUS UDALRICUS SWAHN,

Stip. Publ. Borea-Fenno.

In Audit. Phil. die XIX Aprilis MDCCCXVII,

h. a. m. s.

ABOÆ, Typis FRENCKELLIANIS.

Veloc. in directione τȣ $x = \mathrm{d}x \,.\, \sqrt{-\frac{P}{\mathrm{d}^2 y}}$;

Veloc. in directione τȣ $y = \pm \mathrm{d}y \,.\, \sqrt{-\frac{P}{\mathrm{d}\,y}}$; &c.

absque difficultate resolvi posse, liquet; sufficietque omnino ad rem bene illustrandam sequens, quod adferendum ducimus,

Exemp.: Positâ resistentiâ $R = \alpha D v^m$ (ubi α, D & m cognitæ sunt quantitates), detur utique motus corporis progressivus in directione determinata abscissæ x; quæruntur natura curvæ descriptæ visque absoluta P? Sit quidem data, in directione ipsius x, velocitas (quam functionis instar abscissæ x heic considerabimus) $= v'$; habebitur:

$$R = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}q \,.\, \mathrm{d}\,.\left(\frac{P}{\mathrm{d}^2 y}\right) = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}q \,.\, \mathrm{d}\,.\left(-\frac{v'^2}{\mathrm{d}x^2}\right) = -\frac{v'\mathrm{d}v' \,.\, \mathrm{d}q}{\mathrm{d}x^2};$$

$v = \dfrac{v'\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}$; hincque:

$$-\frac{v'\mathrm{d}v' \,.\, \mathrm{d}q}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\alpha D v'^m \mathrm{d}q^m}{\mathrm{d}x^m},$$

$$\mathrm{d}q^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \left(-\frac{\mathrm{d}v' \,.\, \mathrm{d}x^{m-2}}{\alpha D v'^{m-1}}\right)^{\frac{2}{m-1}},$$

$$\mathrm{d}y = \pm\, \mathrm{d}x \,.\, \sqrt{\left(-\frac{\mathrm{d}v'}{\alpha D v'^{m-1}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{2}{m-1}} - 1};$$

 qua

qua in æquatione separatæ sunt variabiles x & y, si densitas data D ex ordinatâ y non pendeat. Datâ autem trajectoriæ æquatione, potentiam absolutam, formulâ:

$$P = \frac{-v'^2 . \mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2},$$

facile determinari posse, evidens est.

Quod si $m = 1$, æquatio allata x inter & y nihil nos docebit; prodire autem hoc in casu apparet:

$$\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}x} = -\alpha D;$$

unde, positâ, uti nuper, D functione tantum ipsius x, fiet:

$$v' = C - \alpha \int D\,\mathrm{d}x;$$

quâ quidem formulâ perspicuum est, quantitatem v', in præsenti hypothesi, determinatam omnino esse abscissæ functionem, neque pro lubitu assumi posse; ideoque problema, de quo jam agitur, in hoc casu speciali, proponendum non esse.

Ceterum, observatu facile est, æquationem:

$$R = -\frac{v'\,\mathrm{d}v' . \mathrm{d}q}{\mathrm{d}x^2},$$

in genere monstrare, motum in directione ipsius x, in præsenti vis absolutæ hypothesi, (*resistente* re-

revera medio), neque uniformem umquam esse posse, neque acceleratum, sed necessario retardatum haberi.

Allatæ supra æquationis (*18*) ad casum $D = o$ applicationem, memoratu quidem dignam, hoc loco non prætermittemus. Observandum igitur, hac in hypothesi, (cum $dq = o$ poni nequeat) esse:

$$d.\left(\frac{P}{d^2y}\right) = o, \text{ \&, integrando: } \frac{P}{d^2y} = \frac{C}{dx^2}.$$

Determinetur constans $C\left(= -\frac{P dq^2}{d^2y} \cdot -\frac{dx^2}{dq^2}\right)$ $= - c^2 n^2$; eritque:

$$\frac{c^2 n^2 . d^2y}{dx^2} = - P;$$

quæ quidem æquatio, in quibusdam casibus separationem variabilium admittens, eâ heic hypothesi consideranda, qua potentia sollicitans P functio habeatur solius y.

Multiplicatâ, hoc in casu, æquatione per dy, & institutâ integratione, habebitur:

$$\frac{c^2 n^2 . dy^2}{2\,dx^2} = C' - \int P\,dy = C' - f(y);$$

 hinc-

hincque:

$$\frac{c^2 n^2 . m^2}{2 n^2} = C' - f(o);$$

quas inter æquationes exterminatâ constante arbitrariâ, &c., prodibit tandem:

$$dx = \frac{\pm cn . dy}{\sqrt{c^2 m^2 + 2 . f(o) - 2 . f(y)}};$$

tractanda facile æquatio, in casu quolibet particulari.

Velocitatem quidem atque tempus, in præsente casu, formulis sequentibus determinari videas:

$$v^2 \left(= -\frac{P dq^2}{d^2 y} \right) = \frac{c^2 n^2 . dq^2}{dx^2} = c^2 + 2 . f(o) - 2 . f(y),$$

$$t \left(= \int \sqrt{-\frac{d^2 y}{P}} \right) = \int \frac{dx}{cn} = \frac{x}{cn} + Const.;$$

unde, præter alia, colligere possumus, motum in directione τȣ x, in ea, de qua jam agitur, hypothesi, necessario uniformem esse.

Exemp.: Positâ P = quantitati constanti g; quæritur trajectoria corporis in vacuo descripta? Erit jam $f(y) = gy$; unde fiet:

$x =$

$$x = \int \frac{\pm cn \,.\, dy}{\sqrt{c^2 m^2 - 2gy}} = Const. \mp \frac{cn}{g} \,.\, \sqrt{c^2 m^2 - 2gy};$$

hincque:

$$o = Const. \mp \frac{cn}{g} \,.\, \sqrt{c^2 m^2};$$

quam quidem æquationem de præcedente demendo, &c., habebis tandem:

$$x^2 \mp \frac{2\, c^2 mn}{g} \,.\, x + \frac{2\, c^2 n^2}{g} \,.\, y = o,$$

quæ quidem manifesto *Parabolam* designat *Apollonianam*, cujus axis lineæ abscissarum normalis, atque Parameter $= \frac{2\, c^2 n^2}{g}$: quâque in æquatione signum tantum adhiberi posse superius, nobis vel non monentibus, apparet.

§. IX.

Motus corporum planos tractantes, casum eorum simplicissimum, non vero negligendum, motus scilicet *rectilineos*, breviter quoque attingamus, necesse est. Observabimus igitur, in §. præcedente, unam quidem potentiarum absolutarum L & M, in plano abscissarum ABC (vide fig.) agentium, $= o$ positam fuisse; velocitatem vero quamdam initialem

tialem in directione vis evanescentis, assumtam simul fuisse. Motus vero rectilineos in genere definiturus, non solum quantitatum L, M alterutram æqualem nihilo accipias: omnem quoque in directione vis illius, quæ evanuit, motum insitum tollas, projectile nimirum in directione ipsâ vis non evanescentis, ex. gr. τȣ L, impellendo.

Habentur igitur, hoc in casu:

$$y = o, \; \mathrm{d}y = o, \; \mathrm{d}^2 y = o;$$

unde prodit adeo $\mathrm{d}q = \mathrm{d}x$, nec non:

$$v^2 \left(= \frac{(L\,\mathrm{d}y - M\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}y\,.\,\mathrm{d}^2x - \mathrm{d}x\,.\,\mathrm{d}^2y} \right) = \frac{o}{o}:$$

quæ forma quidem indeterminata omnino est, nihilque nos docet. Allata igitur supra æquatio (III), naturam trajectoriæ in plano descriptæ in genere definiens, in præsente jam casu, ad motum illustrandum nihil conferet, nisi, pro valore ipsius v nuper citato, ipsam quidem substitui quantitatem v ponamus: unde habebitur æquatio:

$$\varphi(D, v) = L - \frac{\mathrm{d}\,.\,v^2}{2\,\mathrm{d}x} = L - \frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \quad . \quad . \quad . \quad (IV);$$

quæ quidem, designantibus D & L datas quascunque

que

que ipsius x functiones, relationem x inter & v, hoc in casu, exponit; adeoque, cum ipsâ:

$$\mathrm{d}t \left(= \frac{\mathrm{d}q}{v}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{v},$$

conjuncta, omnia, quæ ad motum spectant corporis secundum AB progredientis, comprehendit.

In hypothesi vero $D = o$, eamdem (IV) in hanc:

$$L = \frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IV'),$$

abire patet: qua igitur æquatione motus in vacuo rectilinei in genere definientur.

Præcipuus quidem casus, quo separationem variabilium admittat æquatio nostra (IV), se offert, quando $R = \alpha D v^2$: quo quidem, denotantibus D & L functiones quascumque, habebitur:

$$\alpha D v^2 \mathrm{d}x + v\mathrm{d}v = L\mathrm{d}x;$$

quâ utique æquatione per $\left(2 e^{\int 2 \alpha D \mathrm{d}x}\right)$ multiplicatâ, institutâque integratione, prodibit:

$$v^2 . e^{\int 2 \alpha D \mathrm{d}x} = \int e^{\int 2 \alpha D \mathrm{d}x} 2L\mathrm{d}x + Const.;$$

ubi separatas omnino x atque v videmus. Missis autem aliis, quibus integrari possit hæc æquatio, hy-

hypothesibus, ad casum tantum utilissimum, quo densitas D constans, atque vis quoque absoluta L = constanti g, paullisper subsistamus: qua utique hypothesi, æquatio nuperrime allata facile præbebit:

$$v^2 = \frac{g \cdot e^{2\alpha Dx} + C}{\alpha D \cdot e^{2\alpha Dx}} = \frac{g \cdot e^{2\alpha Dx} + \alpha Dc^2 - g}{\alpha D \cdot e^{2\alpha Dx}} \quad \ldots (20),$$

accipiendo scilicet $v = c$, quando $x = 0$; hincque:

$$t = \int \frac{\sqrt{\alpha D} \cdot e^{\alpha Dx} dx}{\sqrt{g \cdot e^{2\alpha Dx} + \alpha Dc^2 - g}},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha Dg}} \cdot \text{Log.}\left(\sqrt{g \cdot e^{2\alpha Dx}} + \sqrt{g \cdot e^{2\alpha Dx} + \alpha Dc^2 - g}\right) + Const.,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha Dg}} \cdot \text{Log.}\left(\frac{\sqrt{g \cdot e^{2\alpha Dx}} + \sqrt{g \cdot e^{2\alpha Dx} + \alpha Dc^2 - g}}{\sqrt{g} + \sqrt{\alpha Dc^2}}\right) \ldots (21),$$

adhibitâ quidem, in integrando, substitutione: $e^{\alpha Dx} = s$, determinatâque dein constante arbitrariâ adeo, ut evanescant simul x atque t.

Quod si

Quod si g autem negativa habeatur, prodibit utique:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha Dg}} \cdot \text{Arc. Sin.} \left(\frac{\sqrt{g} \cdot e^{2\alpha Dx}}{\sqrt{\alpha Dc^2 + g}} \right) + \text{Const.},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha Dg}} \cdot \text{Arc. Sin.} \left(\frac{\sqrt{\alpha Dc^2} \cdot \sqrt{g} \cdot e^{2\alpha Dx} - \sqrt{g} \cdot \sqrt{\alpha Dc^2 + g - g \cdot e^{2\alpha Dx}}}{\alpha Dc^2 + g} \right),$$

determinatâ quidem, uti nuper, constante arbitrariâ.

In æquatione ipsâ (IV') separatas statim videmus variabiles, unde ejus quidem tractatio magnis non prematur difficultatibus. Hypothesin igitur tantum simplicissimam maximique usûs, quando L constans sit, seu $= g$, memorasse juvabit; quâ scil. habebitur:

$vdv = gdx$, hincque: $v^2 = 2gx + C = 2gx + c^2$ . . (22),

nec non:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{2gx + c^2}} = \frac{\sqrt{2gx + c^2}}{g} + C' = \frac{\sqrt{2gx + c^2} - c}{g} \ldots (23);$$

determinatis scilicet eodem, quo antea, modo constantibus C & C'.

 § X.

§. X.

Expositis jam præcipuis, quæ Mathematicas spectent disquisitiones de motibus corporum liberis, per potentias allati supra generis determinatis, observationes adhuc quædam adjiciendæ videntur, quibus tam uberior adfundatur lux hypothesi, qua heic motus corporum considerare visum fuit, quam via quoque applicationi cuidam eorum, quæ hactenus tradita sunt, sterni possit.

Notandum igitur ante omnia, nos heic quidem *corpora*, non puncta (quæ plerumque considerant Auctores), mota posuisse, quo superficies quædam, in quam ipsum ageret medium, projectili tribui posset: hoc vero assumto, ut erroneæ omnes vitentur notiones, observari convenit:

1:o. Arbitrio nostro quodammodo permitti, in quibusnam punctis corporis moti suis in directionibus agentes censeantur vires motrices absolutæ, ipsas L, M & N efficientes (quas quidem potentias motrices per Lm, Mm & Nm definitas videbis, positâ massâ corporis moti $= m$): quantitatibus tamen harum virium (si variabiles fuerint) ex ipso loco centri corporis inertiæ unice pendentibus.

2:o. Densitatem medii, pro unoquoque puncto superficiei corporis medium impellentis, eamdem omnino haberi, pendente tamen ejus quantitate ab-

absolutâ (si mutabilis scil. assumatur) ex ipso loco centri inertiæ corporis moti.

3:o. Superficiem projectilis ipsi motûs plagæ adversam, ejus utique indolis haberi, ut directio totius, quâ ob motum suum a medio urgeatur corpus, vis, cum ipsâ motûs centri inertiæ directione coincidat, sive ei saltem sit parallela.

4:o. Corporis, de quo agitur, eum tantum circa centrum inertiæ assumtum esse motum, quo forsitan opus erit, ut eadem semper superficies ipsi motûs plagæ advertatur (quem tamen motum novæ cujusdam, quâ a medio prematur corpus, vis haberi caussam, heic non ponendum); cujus quidem motûs gyratorii caussa examinanda hoc loco non est, sufficiatque omnino nobis, hujusmodi motum necessario heic esse accipiendum.

5:o. In præcedentibus igitur motum tantum centri corporis inertiæ consideratum esse, cui quidem centro soli, per theoriam motûs corporum finitæ magnitudinis, vires omnes adhibitæ L, M, N, R suis in directionibus applicatæ existimari possunt.

§. XI.

Quibus quidem præmissis de hypothesi motuum heic consideratorum observationibus genera-

 libus,

libus, ad usum jam quemdam præcedentium parandum, adcuratiorem adeo *junctionis & determinationem*, qualem experimenta probatissima postulare videntur, proponere paucis non pigebit. In hoc vero præcipuum deprehendimus rei nodum, cum non tantum diversa superficierum ratio, medium impellentium, arduas valde hasce reddant disquisitiones, sed ipse quoque casus simplicissimus, quo resistentia quæritur plani ad directionem motûs perpendicularis (directam vocant resistentiam), pro planis ferientibus vel celeritatibus valde inter se diversis, non contemnendis adhuc difficultatibus prematur: unde theoriam quidem in sequentibus breviter exponendam, pro corporibus motis velocitatibusque non valde parvis vel magnis (de quibus scilicet solis certi quid experimenta docere possunt), valere, ab initio statim monendum est.

Quod si igitur, ante omnia, caussas resistentiæ medii *indefiniti* (quod heic tantum consideramus) perpendere velimus, eas utique plures omnino haberi, perspicuum est. Posito scilicet ipso medio a nullis sollicitato potentiis, corpori tamen moto resistat idem necesse est, partim inertiâ particularum, quibus motus a corpore imprimi debet, partim frictione medium inter atque corpus, ex eorum inter se percussione, oriundâ, partimque

que tenacitate, sive mutuâ particularum a corpore separandarum cohæsione, (quibus quidem resistentiæ caussis ipsam quoque medii ad superficiem corporis adhæsionem adjungere solent): quod si autem potentiarum vi premi ponamus medium, ad allatos jam resistentiæ fontes addenda est immutatio pressionis medii hydrostaticæ, ex motu corporis oriunda, ipsaque frictio medium inter atque superficiem corporis, ex memoratâ pressione hydrostaticâ, proveniens. Valeant utique hæc de mediis *non compressibilibus:* de *compressibilibus* in genere notandum, ad anticas corporis moti partes eadem condensari, ad posticas vero dilatari, idque eo magis, quo obtusiores hæ habeantur partes, motusque celerior; quâ utique ratione vel solâ concludi posset, medii compressibilis sive elastici majorem esse resistentiam, quam non elastici, ejusdem densitatis, nullisque ceteroquin viribus sollicitati: quod quidem experientiâ quoque confirmatur. Inter memoratas nuper resistentiæ caussas, ad vim inertiæ medii, frictionemque ex mutuâ medii atque corporis percussione oriundam, hoc loco præcipue attendisse liceat, idque vel eâ ratione, quod haud videatur dubium, reliquarum resistentiæ caussarum magnum plerumque non esse effectum: resistentia scilicet ex tenacitate oriens, nisi pro mediis glutinosis, seu velocitatibus massisque motis valde parvis, non erit sensibilis, ceteræque caussæ, teste

ex-

experientiâ, pro magnâ tantum medii pressione atque corporibus grandibus, vel crescentibus admodum velocitatibus, majoris habentur momenti. Quod si igitur ex principiis duobus memoratis adcurate profluerent formulæ proponendæ (quod tamen in re tam intricatâ ne exspectari quidem potest), pro mediis elasticis potentiarumve vi sollicitatis, augenda necessario esse resultata nostra, idque eo magis, quo major habeatur velocitas, perspectu facile est.

Ut debito jam ordine progrediamur, resistentia ipsa *directa* primum consideranda, quam quidem revera ex inertiâ tantum medii pendentem ponemus, cum frictio memorata ex percussione proveniens, nullum, vel valde saltem exiguum, ad retardandum corporis motum, præstare jam possit effectum: unde observandum est, hujusmodi resistentiæ vim, testibus experimentis adcuratis, optime definiri per *pondus columnæ medii, cujus basis est planum directe feriens, cujusque altitudo illa est, per quam corpus in vacuo cadens, velocitatem motûs in medio adquireret:* quod quidem utilissimum principium hydrodynamicum fundamenti instar totius de resistentiâ fluidorum doctrinæ, habendum vere est. Allatæ nuper regulæ demonstrationem quamdam heic adferendi non est locus: ostendendum tantum, quomodo ad inveniendam hoc in

casu

casu quantitatem R, in præcedentibus adhibitam, applicari eadem queat. Positis igitur D & v, ut antea, = densitati medii atque velocitati corporis, nec non l = areæ plani directe impingentis, atque (quod in omnibus quoque quæ sequantur valeat) m = massæ ipsius corporis, in medio moti; patet utique facile, per postulatum nuper memoratum, prodire:

$$R = \frac{Dlv^2}{2m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Determinatâ autem sic adcurate satis resistentiâ directâ, difficultatibus multo adhuc majoribus rem premi videbimus, si *obliquam* considerare planorum resistentiam, hincque etiam ad resistentiam *superficierum curvarum* investigandam transire, velimus.

Quod si solam adhuc inertiam medii resistentiæ caussam assumi placeat, per allata nuper difficile quidem non eruetur expressio resistentiæ corporis, cujus superficies motûs plagæ adversa binis constituitur planis similibus atque æqualibus, eoque inter se modo dispositis, ut, latis iis circa communem intersectionem tamquam axem immobilem, alterum alterius locum exacte occupare possit: exsistente utique directione motûs corporis ad hanc ipsam intersectionem normali, eâdemque directione angulum

gulum bina inter plana constitutum bisecante, motoque ceterum corpore eam in plagam, ut citata planorum intersectio prægrediens quasi censeri possit. Ponendo nimirum angulum incidentiæ utriusque plani (i. e. dimidium anguli inter plana contenti) $= u$, summamque projectionum orthographicarum amborum planorum, in plano ad directionem motûs perpendiculari factarum, $= p$; determinabimus absque negotio in casu præsente:

$$R = \frac{Dpv^2}{2m} . \operatorname{Sin} u^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b).$$

Applicatâque hac formulâ directe ad inveniendam resistentiam solidi cujuscumque revolutionis, in directione ipsius axeos, moti (cujus generis superficies curvas heic tantum considerabimus), eruemus jam facile:

$$\mathrm{d}R = \frac{\pi D v^2}{m} . \frac{y \mathrm{d} y^3}{\mathrm{d} z^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c):$$

statuendo scilicet, lineam superficiei generatricem datâ inter coordinatas orthogonales x & y æquatione definitam esse, coincidente quidem lineâ ipsarum x cum axe revolutionis; assumendoque, brevitatis ergo, $\mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$.

Formulis vero (b) & (c), sic facile erutis, ne plus justo fidas. Continetur his quidem theoria illa

illa a Newtono jamdum fundata, hactenusque a Mathematicis frequentissime adhibita, per experimenta vero adcurate instituta, quibus solis hac in re credendum, manca adeo deprehensa, ut pro proris quidem planis atque curvis convexis modo omnino opposito a veritate aberret. Quod quidem minus mirabimur, si consideraverimus, nullam heic omnino habitam fuisse rationem frictionis, ex ipsâ pressione medii ad anticas corporis partes, ortæ; ipsamque etiam formulam (*c*), si vel ad inertiam tantum fluidi attendamus, ideo esse erroneam, quod pressio illa, quâ sollicitetur revera unumquodque superficiei curvæ punctum, ex actione solà fluidi, hoc punctum immediate percutientis, pendens assumta sit, nullâ habitâ ratione ad particulas ab aliis superficiei partibus oblique affluentes, quæ effectum tamen immediatum necessario diminuent vel augebunt. Longum esset, varia heic memorare summorum sane Geometrarum conata theoriam nuper expositam experientiæ convenientiorem efficiendi: pro nostro quidem satis erit instituto, leviter attigisse theoriam, ceteris sine dubio præferendam, quam non multos abhinc annos proposuit Cel. Nordmark *α*); cui quidem,

α) Sv. Vet. Acad. Handl. 1805, 3 quart.; nec non: Principes d'une Nouvelle Théorie de la Résistance des fluides, p. Z. Nordmark, Mémoire qui a remporté un prix du Departement Impérial de la Marine de Russie, St. Petersbourg 1808.

dem, ut nobis constat, primo contigit, non solum formulam (*b*), frictionis adhibitâ notione, experimentis satis consentaneam reddere, sed etiam, quod præcipuum fere judicandum est, quæ de corrigendâ formulâ (*c*) nuper monuimus, recte perpendere, veraque sic, ad computandas resistentias prorarum polygonarum superficierumque curvarum, principia exstruere.

Ut, quâ fieri possit concinnitate, laudatæ jam theoriæ mentionem quamdam faciamus, formulam huc spectantem fundamentalem, corollariorum feracem, primum adferemus, quâ utique resistentia exhibeatur corporis, proram habentis polygonam ex quattuor rectangulis compositam, quorum duo quidem, quæ *priora* vocabimus, quæque similia sint & æqualia, parallela invicem quattuor habeant latera, eamdemque omnino inter se & ad motum corporis relationem servent, ac plana illa, quæ memoravimus, æquationem (*b*) spectantia; ceteraque duo, quæ rectangula *posteriora* dicemus, quæque etiam similia sint & æqualia, juncta habeant exacte duo latera lateribus duobus rectangulorum priorum ab intersectione inter plana horum rectangulorum maxime distantibus, eademque omnino latera æqualia habeant memoratis rectangulorum priorum lateribus: exsistentibus ceterum angulis incidentiæ rectangulorum posteriorum invicem æqualibus,

bus, cadenteque intersectione inter plana horum rectangulorum ipsam motûs plagam versus, ut ita dicam, non vero ad partes contrarias. Sint scilicet jam anguli incidentiæ rectangulorum priorum $= u$; posteriorum $= w$; summa projectionum orthographicarum rectangulorum priorum, in plano ad directionem motûs perpendiculari factarum $= q$; summa projectionum orthographicarum rectangulorum posteriorum, in ejusdem generis plano obtinentium $= r$; ea quantitatum q & r, quæ minor sit alterâ (quando inæquales scil. habentur) $= s$; tandemque frictio medii inter particulas atque partem quamdam proræ corporis moti $= f \theta\, \vartheta^n$, ubi f quantitas est constans ex indole superficiei datæ atque medii pendens experimentisque determinanda, θ pressio medii perpendicularis, ex percussione actuali oriunda frictionemque generans, atque ϑ velocitas medii secundum planum, de quo agitur, moti: quibus adeo notatis, definietur utique in casu præsente resistentiæ vis retardatrix formulâ:

$$R = \frac{Dv^2}{2m} . (q . Sin\, u^2 + r . Sin\, w^2 - s . Cos\, u . Sin\, w . Sin\, (u - w)) +$$

$$\frac{Dfv^{n+2}}{2m} . \left(q . Cos\, u^{n+1} + r . Cos\, w^{n+1} - \frac{s . Cos\, u . Cos\, w^{n+1} . Sin\, (u - w)}{Sin\, w}\right) \ldots (d).$$

Ex

Ex quâ quidem plura duci posse consectaria videbis. Ponendo scilicet $u = w$, unde prodit casus formulæ (b), observandoque, posse hoc in casu manifesto $q + r$ in quantitatem generalem supra adhibitam p immutari; habebimus utique jam:

$$R = \frac{Dv^2}{2m} . p . Sin\, u^2 + \frac{Dfv^{n+2}}{2m} . \quad p . Cos\, u^{n+1} \ldots (e);$$

quæ quidem formula, pro allatâ supra (b), ob actionem frictionis correctâ, haberi potest; atque, positâ $u = 1^q$, in ipsam (a) sponte mutatur.

Applicari ceterum quoque potest ipsa (d), ad eruendas formulas a D:o NORDMARK propositas, pro determinandâ resistentiâ curvarum planarum, cylindroidum atque solidorum revolutionis: si observetur tantum, quantitatem $Cos\, u \,.\, Sin\, (u - w)$, quæ diminutioni pressionis perpendicularis in punctum quoddam rectangulorum posteriorum, ex motu fluidi secundum plana priorum orienti, proportionalis est, in formulâ differentiali pro resistentiâ curvæ planæ necessario exprimendam esse per $\left(\int \frac{dx}{K}\right)$, non vero per $\left(\frac{dx}{K}\right)$ (designante K radium curvaturæ in puncto curvæ, de quo agitur). Quo quidem notato, facili omnino negotio formula (d) in citatas nuper tres transibit, quarum eam tantum,

tum, quæ solida spectet revolutionis, brevitatis gratia, attulisse heic sufficiat. Observatis scilicet iisdem, quæ pro allatâ supra (c) notavimus, prodibit utique hoc in casu:

$$\mathrm{d}R = \frac{\pi D v^2}{2m} . \left(\frac{2y\,\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}z^2} - \frac{y\,\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}z} . \int \frac{\mathrm{d}x}{K}\right) +$$

$$\frac{\pi D f v^{n+2}}{2m} . \left(\frac{2y\,\mathrm{d}y . \mathrm{d}x^{n+1}}{\mathrm{d}z^{n+1}} - \frac{y\,\mathrm{d}x^{n+1}}{\mathrm{d}z^n} . \int \frac{\mathrm{d}x}{K}\right) . . (f);$$

quæ quidem expressio, pro ipsâ tantum (c) emendatâ, haberi potest.

Ponendo quidem $u < w$ in formulâ (d) (unde superficies in motûs plagam concava habebitur), positivam hanc totam videbis; unde sequitur, mutari omnino resistentiæ valorem, mutato planorum ordine, licet eadem omnino maneant ipsa plana iidemque eorum anguli incidentiæ: quod veritati haberi consentaneum, tam ratiociniis, quam experimentis, facile constat. Valent omnino eadem de formulis theoriæ præcedentis, pro resistentiâ curvarum planarum atque cylindroidum: concavarum scilicet, ob mutatum radii curvaturæ signum, ceteris paribus, resistentiam majorem, convexarumque minorem, uti par quoque omnino est, prodire videmus. Cum theoria vero non solum vulgaris, verum aliæ quoque omnes huc usque propositæ,

sitæ, in citatis nuper casibus, resistentiam figuræ convexæ atque concavæ omnino eamdem præbeant, hinc quidem præcipue præstantiam cernimus formularum jam allatarum, quâ utique, si vel ceterum omnibus immunes forsan non essent objectionibus, insignis tamen semper pretii his in disquisitionibus habebuntur.

Quantitates vero quod attinet n atque f, in allatis supra expressionibus occurrentes, experimentorum tantum ope has esse investigandas, patet. In hac autem determinatione quædam adhuc desiderari, fatendum est, antequam certitudine quadam plenâ ad usus practicos adcommodari possint formulæ propositæ: quod tamen ipsi theoriæ vitio vertendum non esse, apparet. Quando hanc quidem primum proposuit Cel. NORDMARK, secundum plurima tunc nota experimenta, exponentem $n = 1$ statuit, ostenditque, in hac hypothesi, determinatâque $f = 0{,}0934442$ (assumto unitatis instar pede Gallico), formulas allatas experimentis adcuratis de resistentiâ corporum aquæ innatantium, a D:is D'ALEMBERT, DE CONDORCET atque BOSSUT institutis β), satis bene consentire. Dein vero recte

β) Nouvelles Expériences sur la Résistance des fluides, par MM. D'ALEMBERT, le Marquis DE CONDORCET & l'Abbé BOSSUT, Paris 1777; atque Mémoires de l'Acad. R. des sciences de Paris, 1778.

ete observavit γ), probabile esse, resistentiam hoc modo computatam, crescentibus aliquanto magis velocitatibus, nimiam esse prodituram; hypothesinque simplicissimam $n = o$, quæ EULERO præcipue placuit, præter alias, considerandam heic proposuit. Quæ cum ita sint, præbenteque memoratâ nuperrime hypothesi id etiam commodi, ut habeatur resistentia pro corporibus quibuscumque motis, formæ simplicis αDv^2: non inutilem prorsus operam sumturos nos speravimus, si posterioris hujus de frictione hypotheseos cum experimentis quibusdam comprobatis institueremus comparationem, quo facilius quidem in posterum hac in re idoneum feratur judicium. Determinavimus igitur ante omnia hoc in casu quantitatem f, formulâ:

$$f = \frac{2Rm - Dv^2 . p . \operatorname{Sin} u^2}{Dv^2 . p . \operatorname{Cos} u};$$

utentes hac in investigatione iisdem experimentis 75, 82, 86, 106, 121, 129, 143, 146, 156 atque 166, in *Nouvelles Expériences &c. Chap. II* occurrentibus, quæ, ad eumdem obtinendum finem, in hypothesi $n = 1$, adhibuit D:s NORDMARK, quæque ad hanc utique disquisitionem idonea videntur. Sumto igitur decem valorum hinc profluentium medio arithmetico, invenimus tandem:

$$f = 0{,}2346963,$$

qui

γ) Sv. Vet. Acad. Handl. 1814, p. 1 & seqq.

qui utique valor pro numero absoluto habendus est, ex nullâ unitate speciali, pendente. Valore jam hoc ipsius f adhibito, columnam secundam tabellæ sequentis computavimus, quâ quidem diversæ theoriæ resultata cum experimentis quibusdam Academicorum quos citavimus Gallicorum, comparare visum fuit, pertinentibus utique periculorum undecim prioribus ad *Nouv. Exp &c. Chap. II*, ceteris vero, ad *Mém. de l'Ac. R. des Sc. de Paris* 1778.

Exp.	Ang. incid. u	Spatia in ped. Gall. temp. 1″ descr.	Pondus resistentiæ æquivalens, in libr. Gall.			
			Per theor. vulg.	Hyp. $n = o$	Hyp. $n = 1$	Experim.
83	63°26′5″	1,90	6,68	7,55	6,97	6,00
91	45 . 0 . 0	2,22	5,72	7,62	6,91	6,00
169	43 . 1 . 30	2,53	5,90	8,07	7,50	8,00
97	33 . 41 . 24	2,22	3,52	5,76	5,17	5,00
105	26 . 33 . 54	2,52	2,95	6,04	5,73	5,00
173	25 . 26 . 6	2,65	2,56	5,50	5,36	6,00
113	21 . 48 . 5	2,53	2,05	5,29	5,08	5,00
75	14 . 2 . 10	3,37	0,77	3,76	4,66	5,00
185		3,02	7,53	7,53	7,21	6,00
189		2,50	8,22	8,21	7,79	6,00
194		2,45	10,06	10,05	9,54	8,00
10	84 . 0 . 0	2,59	250,55	256,76	251,22	262,50
25	66 . 0 . 0	2,80	247,60	275,92	260,44	262,50
35	54 . 0 . 0	3,09	236,96	286,90	273,10	262,50
40	48 . 0 . 0	3,28	225,00	288,98	280,91	262,50
45	42 . 0 . 0	3,49	206,50	286,94	289,56	262,50
55	30 . 0 . 0	3,88	142,22	257,85	296,74	262,50
63	18 . 0 . 0	3,14	35,76	119,35	135,29	162,50
69	6 . 0 . 0	3,20	4,23	94,68	118,78	162,50
70		1,70	73,33	73,25	68,68	62,00
72		2,85	205,30	205,09	195,82	162,50
75		2,36	166,04	173,57	164,63	162,50

Ex

Ex quâ quidem tabellâ perspicimus, valorem ipsius f, in hypothesi $n = o$, supra erutum, pro angulis incidentiæ minoribus, justo esse minorem, pro angulis autem mediis, atque maxime pro superficiebus curvis (quas experimenta spectant 185, 189, 194, 70, 72, 75), justo haberi majorem: unde sequitur, coëfficientis quidem f medium quasi esse valorem, eumque ideo satis recte esse determinatum. Fatendum vero est, videri hinc experimenta illa, quæ jam consideravimus, hypothesi ipsi $n = o$ minus favere: ipsi saltem $n = 1$, a NORDMARK adhibitæ, magis congruere censenda sunt. Plenior tamen huic materiei lux, nonnisi repetitis vario modo experimentis in posterum conciliari potest; fietque tunc forsitan valor maxime probabilis ipsius n neque zero neque unitas, sed fractio quædam positiva unitate minor.

Antequam hæc relinquenda, operæ adhuc est pretium vidisse, quænam, in hypothesi $n = o$, ex valore nuper determinato ipsius f sequatur ratio inter resistentiam Sphæræ atque resistentiam directam circuli ejus maximi, cum in hac tantum hypothesi constans pro diversis velocitatibus hasce inter resistentias ratio obtineat. Observabimus igitur, per formulam (f), prodire hoc in casu facile resistentiam Sphæræ, radio r descriptæ

$$= \frac{\pi r^2 . Dv^2}{2m} . \left(\frac{5}{12} + f . \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi r^2 . Dv^2}{2m} . 0,4670330;$$

K per

per formulam autem (a), haberi resistentiam circuli maximi directam

$$= \frac{\pi r^2 . D v^2}{2m} :$$

unde sequitur, esse resistentiam Sphæræ atque circuli ejus maximi, in ratione 0,4670330 : 1, hoc est 1 : 2, 14 quam proxime; quæ quidem ratio experientiæ videtur propior, quam solita 1 : 2, ex formulâ (c) profluens. Experimenta scilicet a BORDA instituta, ad determinandam resistentiam aëris, rationem dant 1 : 2, 44 δ); quæque a VINCE, cum corporibus sub aquâ demersis, facta fuerunt, rationem præbent 1 : 2, 23 ε): quæ tamen experimenta ulteriori forsan adhuc confirmatione egere, infitias non imus.

Ceterum, observandum probe est, coëfficientem f, ratione supra adhibitâ, directe per experimenta de resistentiâ corporum elicitam, ceteras quoque resistentiæ caussas quasi involventem haberi: unde hoc quidem respectu, theoria in præcedentibus exposita omnes sane resistentiæ caussas, notas nobis ignotasve, comprehendere quodammodo censeri possit.

In

δ) Mém. de l'Acad. R. des Sc. de Paris 1763, p. 369.

ε) Philos. Transact. 1798, p. 6, 7.

In præcedentibus quidem de resistentiâ mediorum observationibus, de partibus tantum corporis moti anticis, sive medium immediate ferientibus, mentionem fecimus; quarum quoque consideratio, hac in materie, absque dubio præcipui est momenti. Docet autem experientia, latera quoque corporis atque caudam, quæ ipsum quidem ictum non accipiunt, aliquantulum ad resistentiam mutandam conferre ζ): in quo tamen effectu ulterius considerando heic non immorabimur, cum longe adhuc absit, ut theoriâ quadam experimentis consentaneâ recte illustrata sit hæc materies, variasque etiam, ut ingenue rem fateamur, Auctorum sententias deprehendamus, an, actione medii in posticas corporis partes, diminuatur revera resistentia in anticas partes, vel augeatur.

§. XII.

Reliquum jam tantum videtur, ut exemplo quodam simplici, quæ hactenus generaliter attulimus, illustrare conemur; quo quidem proposito, quæ adhuc forsan supersint in præcedentibus applicandis, difficultates omnino tollentur. Consideremus

ζ) Vide v. gr. Nouv. Exp. p. 274; Mém. de l' Ac. R. d. Sc. de Paris 1778, p. 378, 379; Sv. Vet. Acad. Handl. 1795, 2 Quart.; nec non Philos. Transact. 1798, p. 6, 10.

remus igitur ex. gr. sequens periculum, ab HAWKSBEE ann. 1710 Londini factum η), quo casum sub dio liberum globi cavi vitrei, 220 ped. Angl. a quiete describentis, contemplatus est. Fuit utique diameter globi 5 digit. Angl., ejusque pondus in aëre 483 granor. Roman.; observatumque est, summâ, ut videtur, curâ, tempus ipsum descensûs $= 8''$, 2: quæritur idem tempus per theoriam? Determinatam quidem non invenimus pro hoc experimento densitatem aëris: ut NEWTONI autem vestigia sequamur, assumamus digitum unum cubicum Angl. 0,295 grana Rom. aëris continuisse; ponamusque etiam grave, cadendo in vacuo, primo minuto secundo 16,111 pedes Angl. Londini describere: quibus quidem positis, omnia jam habemus data ad calculum instituendum. Cum, pro altitudine datâ, densitas aëris, multoque magis vis gravitatis, absque errore constans accipi possit, adhibenda jam est formula allata supra (21); quæ quidem, positâ celeritate initiali $c = 0$, in hanc migrat:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha D g}} . Log. \left(\sqrt{e^{2\alpha D x}} + \sqrt{e^{2\alpha D x} - 1} \right); \text{ hoc est:}$$

$$t = \frac{\alpha D x + Log. 2}{\sqrt{\alpha D g}},$$

si

η) NEWTONI Phil. Nat. Princ. Math. L. II, Pr. XL, Schol. Exp. 13.

si fuerit quidem, quod sæpe accidit, $e^{2\alpha Dx}$ numerus adeo magnus, ut absque errore sensibili poni possit $e^{2\alpha Dx} - 1 = e^{2\alpha Dx}$.

In casu jam occurrente, ad αD investigandam, observabimus, per experimenta quidem videri resistentiam globi, ceteris paribus, paullo minorem dimidio resistentiæ directæ circuli ejus maximi: cum hoc autem in casu motus in medio fiat elastico, majorque, ad finem motûs, habeatur celeritas, quam quæ solitis in periculis obveniat, a veritate non multo aberrabimus, ponendo resistentiam globi (radii r atque massæ m)

$$= R = \frac{\pi r^2 . Dv^2}{4m} = \frac{3}{16 r} . \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 . D}{m} . v^2,$$

quæ formula est theoriæ vulgaris. Cum habeatur igitur e præcedentibus globi aërei, diametro 5 digitor. descripti, pondus in vacuo = 19,3 gran., perspicuum utique est, assumto unitatis instar pede Angl., esse jam: $\alpha D = \frac{3}{16} . \frac{24}{5} . \frac{19,3}{483 + 19,3} = \frac{173,7}{5023}$; unde, cum sine errore perceptibili adhiberi heic possit formula 78 t nuper allata posterior (habetur enim $e^{2\alpha Dx} = (2,718\ldots)^{15,2156} = 4055565,4$ quam pro-

proxime, qui numerus valde est magnus), prodibit utique valor ipsius t quæsitus

$$= \frac{\frac{173,7}{5023} \cdot 220 + 0,6931472}{\sqrt{\frac{173,7}{5023} \cdot \frac{2 \,.\, 16,111 \,.\, 483}{483 + 19,3}}} = 8'',0194,$$

qui ab observato quidem valore parum omnino differt.

Ceterum, observasse operæ est pretium, celeritatem in casu præsente finalem, adhibitâ formulâ (*20*), facile inveniri = 29,93 ped. Angl. in 1'' uniformiter descript.; quæ quidem, cum velocitate quæ hoc in casu adquiri possit maximâ, congruens censeri potest.

Prodeunt quidem, in exemplo allato, per formulas (*23*) atque (*22*), tempus descensûs in vacuo = 3'', 6953, atque celeritas finalis = 119,07. Differentia hos inter valores atque inventos supra actioni aëris tribuenda est.